УДК 621.77.014

Титов В. А.
Гараненко Т. Р.

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТАЛЛОВ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ НА ИЗГИБ. СООБЩЕНИЕ 2

В работе авторов [1] рассмотрен метод экспериментально-аналитического построения кривых деформирования для моделирования малопластичных материалов при испытаниях на изгиб. Метод позволяет эффективно моделировать деформационные свойства материалов в рамках модели упрогопластической упрочняемой сплошной среды. В этих моделях сопротивление деформированию (σ) материала является функцией степени деформации (e).

При формообразовании деталей в условиях горячей пластической деформации сопротивление деформированию металлов зависит так же от фактора времени. В этом случае используют, как правило, зависимость между напряжениями и скоростью деформации (ε) [2, 3]. При этом необходимо отметить, что сопротивление деформированию в этом случае зависит также и от степени деформации [3,4]:

$$\sigma = F(e, \varepsilon) \tag{1}$$

В частности в работе [3] приведена модель материала, которая задана функцией

$$\sigma = Ke^n \varepsilon^m \tag{2}$$

Построение подобных функций для вязкопластических моделей стандартными методами, например при испытаниях на одноосное растяжение (сжатие), трудоемко и материалозатратно. Поэтому в данной работе использован подход построения вязкопластической модели, реализованный в работе [1].

Целью работы является построение вязкопластической модели металлов для изотермических условий при испытаниях на изгиб.

Алгоритм построения вязкопластической модели состоит из следующих этапов:

1. Задание модели металла в виде функции с неизвестными линейными коэффициентами;

2. Получение системы линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов с использованием экспериментальных результатов;

3. Установление экспериментальной зависимости формы деформированной заготовки от величины момента нагружения при чистом изгибе, времени нагружения и температуры деформирования;

4. Решение системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов в модели металла.

Для построения вязкопластических моделей материала была принята аналитическая зависимость, которая выражена степенной функцией вида (1). Для аппроксимации кривой деформирования используем иррациональный многочлен восьмой степени в виде:

$$\sigma_i = ae_i + be_i^{1/2} + ce_i^{1/4} + de_i^{1/8} + A\varepsilon_i + B\varepsilon_i^{1/2} + C\varepsilon_i^{1/4} + DC\varepsilon_i^{1/8}, \tag{3}$$

где ε_i - интенсивность скоростей деформации; e_i - интенсивность деформации.

Решение задачи определения кривых деформирования заключалось в теоретическом определении системы уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимации кривой деформирования. Уравнения устанавливают связь между геометрическими параметрами заготовки при изгибе, свойствами материала при данной температуре, времени деформирования в зависимости от изгибающего момента.

Определяющие уравнения получены при определении момента внутренних сил относительно центра кривизны [5, 6]:

$$M = \int_{R_B}^{R_H} \sigma_t r dr \tag{4}$$

Для описания величины деформации и скорости деформации построена кинематическая модель чистого изгиба широкой заготовки из листового металла, которая учитывает параметр времени (t).

Рассматриваем изгиб листовой заготовки. Анализ чистого пластического изгиба выполняем в цилиндрической системе координат (рис. 1). Считаем деформированное состояние плоское, напряженное состояние объемное.

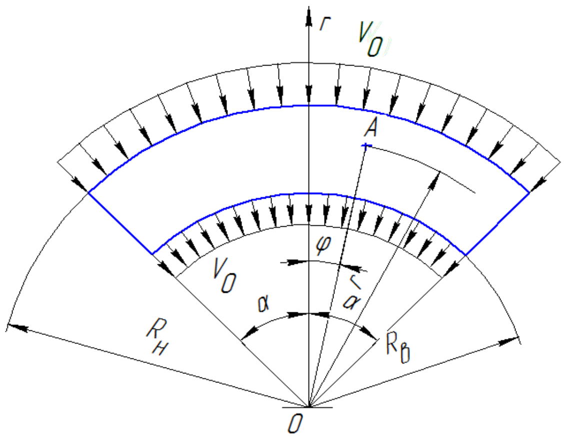

Рис. 1. Схема процесса чистого цилиндрического изгиба

Согласно принятому допущению, деформация в направлении ребра отсутствует, следовательно, скорость перемещения частиц металла в этом направлении принимаем равной нулю.

$$V_z = 0 \tag{5}$$

На основании гипотезы плоских сечений можно считать, что тангенциальная составляющая скорости перемещения частиц металла линейно зависит от радиальной координаты:

$$V_\varphi = Arf(\varphi) \tag{6}$$

Для чистого цилиндрического изгиба радиальная составляющая скорости не зависит от угловой координаты, является функцией только радиальной координаты. Поле скоростей при чистом цилиндрическом изгибе имеет вид:

$$\begin{aligned} V_r &= f(r) \\ V_\varphi &= Arf(\varphi) \\ V_z &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

где $f(\varphi)$ – функция, характеризующая изменение тангенциальной составляющей скорости в зависимости от угловой координаты.

Согласно уравнению неразрывности имеем:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rf(z)) = -A\frac{\partial}{\partial \varphi}(f(\varphi)) \tag{8}$$

Так как левая часть выражения (8) не зависит от угловой координаты, то и правая часть не должна зависеть от нее.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(f(\varphi)) = B \tag{9}$$

Проинтегрировав выражение (9), получим:

$$f(\varphi) = B\varphi + C \tag{10}$$

Подставив (9) в (6) и приняв граничное условие $V_\varphi = 0$ при $\varphi = 0$, получаем $C = 0$.

Таким образом, тангенциальная составляющая скорости при чистом цилиндрическом изгибе определяется выражением:

$$V_\varphi = A_1 \cdot r \cdot \varphi \tag{11}$$

где $A_1 = A \cdot B$

Для определения радиальной составляющей скорости воспользуемся уравнением (8), которое с учетом (11) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rf(z)) = -A_1 r \tag{12}$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$f(r) = -\frac{A_1}{2}r + \frac{C_1}{r} \tag{13}$$

Таким образом, радиальная составляющая скорости при чистом изгибе определится выражением:

$$V_r = -\frac{C_1}{r} - \frac{A_1}{2}r \tag{14}$$

Так как при чистом изгибе отсутствует изменение толщины заготовок, то, следовательно, скорости перемещения наружной и внутренней поверхностей заготовки относительно координатной оси r, или, что одно и то же, скорости изменения наружного и внутреннего радиусов, будут одинаковы. На основании этого, для определения констант C_1 и A_1, можем записать следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} V_r = -V_0 \text{ при } r = R_B \\ V_r = -V_0 \text{ при } r = R_H \end{gathered} \tag{15}$$

где V_0 – скорость изменения внутреннего и наружного радиусов изгибаемой заготовки.

Решив уравнение (14) при граничных условиях (15), получим

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{2V_0}{R_H + R_B} \\ C_1 = -\frac{V_0 R_H R_B}{R_H + R_B} \end{gathered} \tag{16}$$

С учетом (11), (14) и (16), поле скоростей при чистом цилиндрическом изгибе принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} V_r = -\frac{V_0}{R_H + R_B}(r + \frac{R_H R_B}{r}) \\ V_\varphi = 2\frac{V_0}{R_H + R_B} r\varphi \\ V_Z = 0 \end{gathered} \tag{17}$$

где $R_B \le r \le R_H, 0 \le \varphi \le \alpha$; R_H, R_B, α – соответственно значения внутреннего и наружного радиусов изгибаемой заготовки и угла гиба в данный момент времени.

Введя зависимость координат от времени в следующем виде:

$$\begin{gathered} (R_{B_0} - V_0 t) \le r \le (R_{H_0} - V_0 t) \\ 0 \le \varphi \le \alpha_0 \frac{R_{H_0} + R_{B_0}}{R_{H_0} + R_{B_0} - 2V_0 t} \end{gathered} \tag{18}$$

где R_{H_0}, R_{B_0}, α – соответственно значения внутреннего и наружного радиусов изгибаемой заготовки и угла гиба в начальный момент времени;

Получим поля скоростей следующие выражения:

$$V_r = -\frac{V_0}{R_{H_0} + R_{B_0} - 2V_0 t}\left[r + \frac{(R_{H_0} - V_0 t)(R_{B_0} - V_0 t)}{r}\right]$$

$$V_\varphi = 2\frac{V_0}{R_{H_0} + R_{B_0} - 2V_0 t} r\varphi \qquad (19)$$

$$V_z = 0$$

По известному полю скоростей определяем компоненты тензора скоростей деформации:

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{V_0}{R_{H_0} + R_{B_0} - 2V_0 t}\left[1 - \frac{(R_{H_0} - V_0 t)(R_{B_0} - V_0 t)}{r}\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = 0 \qquad (20)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = 0$$

$$\varepsilon_{zr} = 0$$

Интенсивность скоростей деформации

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + \frac{2}{3}\left(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{zr}^2\right)^2} \qquad (21)$$

Подставим компоненты тензора скоростей деформации (20) в уравнение (21)

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\left|\varepsilon_{\varphi\varphi}\right| \qquad (22)$$

Учитывая, что для широкой полосы принято плоское деформированное состояние, можно записать:

$$e_{rr} = e_{\varphi\varphi}, e_{zz} = 0, e_{r\varphi} = 0 \qquad (23)$$

где $e_{rr}, e_{\varphi\varphi}, e_{zz}, e_{r\varphi}$ – компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат.

Интенсивность деформаций:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})^2 + e_{\varphi\varphi}^2 + e_{rr}^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left|e_{\varphi\varphi}\right|. \qquad (24)$$

Величину распределения тангенциальных деформаций, учитывая принятую гипотезу плоских сечений и монотонность процесса деформирования, можно представить, как:

$$e_{\varphi\varphi} = \ln\frac{r}{\rho}, \qquad (25)$$

где ρ – радиус нейтральной поверхности, равный $\rho = \sqrt{R_H \cdot R_B}$

При разложении логарифма в ряд с точностью до первого члена:

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{r}{\rho} - 1. \qquad (26)$$

Интенсивность напряжений σ_i связана с интенсивностью деформаций e_i функционально и описывается кривой деформирования – модель материала.

Учитывая уравнения (20), (21), (22), (26) аппроксимируемая кривая деформирования (3) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\sigma_i = {} & a\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{r}{\rho}-1)+b(\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{r}{\rho}-1))^{1/2}+c(\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{r}{\rho}-1))^{1/4}+d(\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{r}{\rho}-1))^{1/8}+\\
& +A\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r}\right]+\\
& +B(\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r}\right])^{1/2}\\
& +C(\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r}\right])^{1/4}+\\
& +D(\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r}\right])^{1/8}
\end{aligned}
\qquad (27)
$$

Момент внутренних сил относительно центра кривизны с учетом уравнения (27), имеет вид:

$$
\begin{aligned}
M = {} & 2\int_{\rho}^{R_H}\sigma(r-\rho)dr = 2\int_{\rho}^{R_H}(ae+be^{\frac{1}{2}}+ce^{\frac{1}{4}}+de^{\frac{1}{8}}+A\varepsilon+B\varepsilon^{\frac{1}{2}}+C\varepsilon^{\frac{1}{4}}+D\varepsilon^{\frac{1}{8}})(r-\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)})dr=\\
= {} & 2(\int_{\rho}^{R_н}a\frac{2}{\sqrt{3}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|\cdot rdr-\int_{\rho}^{R_н}a\frac{2}{\sqrt{3}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\\
& +\int_{\rho}^{R_H}b\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{2}}\cdot rdr-\int_{\rho}^{R_н}b\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\\
& +\int_{\rho}^{R_H}c\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{4}}\cdot rdr-\int_{\rho}^{R_H}c\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\\
& +\int_{\rho}^{R_H}d\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{8}}\cdot rdr-\int_{\rho}^{R_H}d\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left|1-\frac{r}{\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}}\right|^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\\
& +\int_{\rho}^{R_н}A\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]\cdot rdr-\int_{\rho}^{R_н}A\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]\times\\
& \times\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\int_{\rho}^{R_н}B\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot rdr-\\
& -\int_{\rho}^{R_н}B\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\\
& +\int_{\rho}^{R_н}C\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot rdr-\\
& -\int_{\rho}^{R_н}C\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{4}}\times\\
& \times\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr+\int_{\rho}^{R_н}D\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{8}}\cdot rdr-\\
& -\int_{\rho}^{R_н}D\cdot\sqrt[8]{\frac{2}{3}\frac{V_0}{R_{H_0}+R_{B_0}-2V_0t}}\left[1-\frac{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}{r^2}\right]^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{(R_{H_0}-V_0t)(R_{B_0}-V_0t)}dr)
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

Расчетные величины для момента в уравнении (28) определяется экспериментально.

При исследовании процессов пластического изгиба деталей в горячем состоянии основной задачей является определение точной аналитической аппроксимации истинных диаграмм растяжения в пластической области.

Испытанию на изгиб подвергают образцы прямоугольного сечения из листовых металлов [7, 8].

Образцы устанавливаются на две опоры и нагружаются нагрузкой (рис. 2), которая сосредоточена на одинаковых расстояниях от опор двумя равными силами, создающими на определенном участке (L) чистый изгиб. Величина изгибающего момента (рис. 2) равна:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot k}{2} \qquad (29)$$

Этот момент постоянен для всех сечений между точками приложения сил $\frac{P}{2}$. Чтобы избежать смятия в опорах, желательно увеличить поверхность контакта и уменьшить изгибающую силу, что достигается при достаточной величине L. При изгибе устраняется важный недостаток испытаний на растяжение – влияние перекосов.

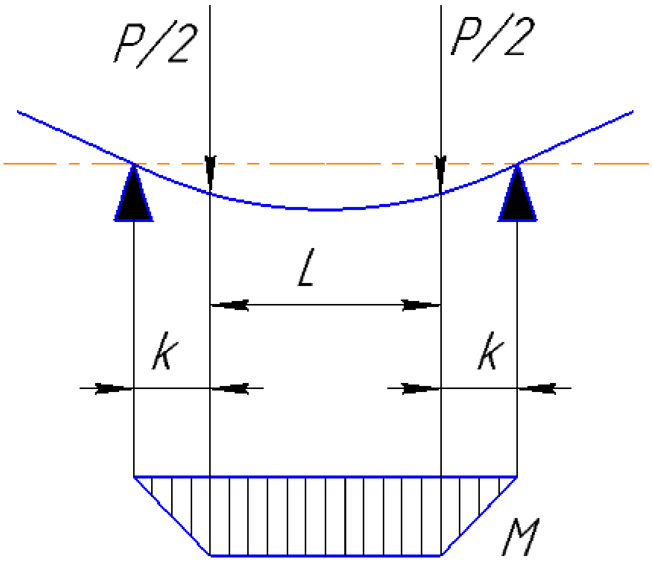

Рис. 2. Схема нагружения при испытании на изгиб

Экспериментально, при $M = const$, строят зависимость величины радиуса изгиба от времени. Полученные экспериментально значения подставляют в уравнение (28) и получают линейную систему из восьми уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимации (a, b, c, d, A, B, C, D).

ВЫВОДЫ

Разработан метод построения вязкопластической модели металлов для изотермических условий при испытаниях на изгиб. Теоретически определена система уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимации кривой деформирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Титов В.А. Метод экспериментально-аналитического построения кривых деформирования материалов при испытании на изгиб. Сообщение 1 / В.А. Титов, Т.Р. Гараненко // Обработка материалов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск :ДГМА, 2015. – №2 (41). – С. 74–81.

2. Сверхпластичность металлических материалов / М.Х. Шоршоров, А.С. Тихонов [и др.] – М.: Наука, 1973. – 219 с.

3.Евстратов В.А. Теория обработки металлов давлением / В.А. Евстратов. – Харьков: Высшая школа, 1981. – 248 с.

4. Кайбышев О.А. Пластичность и сверхпластичность металлов / О.А. Кайбышев. – М.: Металлургия, 1975. – 280 с.

5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

6. Лысов М.Н. Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки / М.Н. Лысов. – М.:Машиностроение, 1966. – 236 с.

7.. Глинер Б.М. Определение механических и технологических свойств металлов / Б.М. Глинер. – М. : Машгиз, 1959. – 160 с.

8. Бернштейн М.Л. Механические свойства металлов / Бернштейн М.Л. – М.: Металлургия, 1979. – 496 с.

REFERENCES

1. Titov V.A. Metod jeksperimental'no-analiticheskogo postroenija krivyh deformirovanija materi-alov pri ispytanii na izgib. Soobshhenie 1 / V.A. Titov, T.R. Garanenko // Obrabotka materialov davleniem : sbornik nauchnyh trudov. – Kramatorsk :DGMA, 2015. – №2 (41). – S. 74–81.

2. Sverhplastichnost' metallicheskih materialov / M.H. Shorshorov, A.S. Tihonov [i dr.] – M.: Nauka, 1973. – 219 s.

3.Evstratov V.A. Teorija obrabotki metallov davleniem / V.A. Evstratov. – Har'kov: Vysshaja shkola, 1981. – 248 s.

4. Kajbyshev O.A. Plastichnost' i sverhplastichnost' metallov / O.A. Kajbyshev. – M.: Metallurgija, 1975. – 280 s.

5. Malinin N.N. Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti / N.N. Malinin. – M.: Mashinostroenie, 1975. – 400 s.

6. Lysov M.N. Teorija i raschet processov izgotovlenija detalej metodami gibki / M.N. Lysov. – M.: Mashinostroenie, 1966. – 236 s.

7.. Gliner B.M. Opredelenie mehanicheskih i tehnologicheskih svojstv metallov / B.M. Gliner. – M.: Mashgiz, 1959. – 160 s.

8. Bernshtejn M.L. Mehanicheskie svojstva metallov / Bernshtejn M.L. – M.: Metallurgija, 1979. – 496 s.

Титов В. А. – д-р техн. наук, проф. НТУУ «КПИ»

Гараненко Т. Р. – ассист. НТУУ «КПИ»

НТУУ «КПИ» – Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев.

E-mail: tetiana.garanenko@gmail.com

Статья поступила в редакцию 10.03.2016 г.